Clase 4. Campos Vectoriales y Operadores Diferenciales

Un campo vectorial en $\mathbb{R}^n$ es una función $F : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Si F es un campo vectorial, una línea de flujo (línea de corriente o curva integral) para F es una trayectoria $\sigma(t)$ tal que $\sigma'(t) = F(\sigma(t))$.De esta manera F define el campo de velocidad de las trayectorias. Suponemos que F es de clase $\mathcal{C}^1$.

Analíticamente el problema de hallar una línea de flujo que pase por el punto x_0 en $t = 0$, implica resolver la ecuación diferencial $\sigma'(t) = F(\sigma(t))$, con condición inicial $\sigma(0) = x_0$.

En $\mathbb{R}^3$, si $F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$, $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ (coordenadas cartesianas) se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} x'(t) &= P(x(t), y(t), z(t)) \\ y'(t) &= Q(x(t), y(t), z(t)) \\ z'(t) &= R(x(t), y(t), z(t)) \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ y(0) &= y_0 \\ z(0) &= z_0 \end{aligned}$$

Geométricamente el problema de hallar una línea de flujo que pase por x_0 es el de hallar una curva que “colocada” en el campo vectorial, su vector tangente (a la curva) “coincida” con el campo vectorial, como se muestra en la figura (**??**) El problema de valor inicial

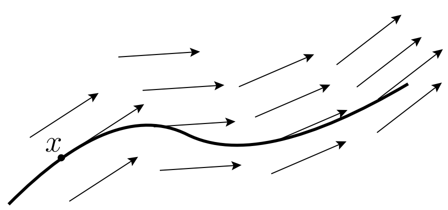

Figura 10:

$\sigma(t) = F(\sigma(t))$, $\sigma(0) = x_0$ es equivalente a la ecuación integral

$$\sigma(t) = \int_0^t F(\sigma(t))\, dt + x_0$$

En general la solución única, la línea de flujo (en condiciones adecuadas) estaría dada por una función $\phi(x,t)$ indicando la posición del punto en la línea de flujo que pasa por x después de transcurrido el tiempo t.

Luego de, $\frac{\partial}{\partial t}\phi(x,t) = F(\phi(x,t))$, $\phi(x,0) = x$ sería

$$\phi(x,t) = \int_0^t F(\phi(x,t))\,dt + x$$

y así la integral representa el flujo F.

Definición 3.8 (Rotor)**.** Consideremos el campo vectorial F de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}^3$, $F(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$. Se define el rotor de F como el campo vectorial de clase $\mathcal{C}$ dado por

$$\mathrm{Rot}(F) = (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y)$$

Usando el símbolo del gradiente, ∇, dado por $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ y su interpretación como un operador diferencial se obtiene que

$$\mathrm{Rot}(F) = \nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y)$$

y su acción en un campo escalar f es

$$\nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

el gradiente de f.

Definición 3.9 (Divergencia)**.** La divergencia del campo vectorial F se define por

$$\mathrm{div}\ F = \nabla \cdot F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Teorema 3.10. Para cualquier campo escalar f de clase $\mathcal{C}^2$ se cumple que Rot $(\mathrm{grad}(f)) = 0$, es decir, $\nabla \times \nabla f = 0$

Demostración : La demostración es sencilla, basta calcular

$$\nabla \times \nabla f = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} = (f_{yz} - f_{zy}\ ,\ f_{zx} - f_{xz}\ ,\ f_{yx} - f_{xy}) = 0$$

ya que las derivadas cruzadas son iguales por ser f de clase $\mathcal{C}^2$. $\square$

Teorema 3.11. Para cualquier campo vectorial F de clase $\mathcal{C}^2$ se cumple que $\operatorname{div}(\text{Rot } F) = 0$, es decir, $\nabla \cdot (\nabla \times F) = 0$

Demostración : Hacemos $F = (P, Q, R)$ y calculamos

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\nabla \times F) &= \nabla \cdot (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(R_y - Q_z) + \frac{\partial}{\partial y}(P_z - R_x) + \frac{\partial}{\partial z}(Q_x - P_y) \\
&= R_{yx} - Q_{zx} + P_{zy} - R_{xy} + Q_{xz} - P_{yz} \\
&= 0
\end{aligned}$$

porque las derivadas cruzadas son iguales por ser F de clase $\mathcal{C}^2$ $\square$

Teorema 3.12. Sean f y g campos escalares de clase $\mathcal{C}^2$. Se cumple que $\operatorname{div}(\nabla f \times \nabla g) = 0$

Demostración : Para realizar la demostración de nuevo hay que realizar las operaciones indicadas:

$$\nabla f \times \nabla g = \begin{vmatrix} i & j & k \\ f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \end{vmatrix} = (f_y g_z - f_z g_y \, , \, f_z g_x - f_x g_z \, , \, f_x g_y - f_y g_x)$$

luego

$$\operatorname{div}(\nabla f \times \nabla g) = \frac{\partial}{\partial x}(f_y g_z - f_z g_y) + \frac{\partial}{\partial y}(f_z g_x - f_x g_z) + \frac{\partial}{\partial z}(f_x g_y - f_y g_x)$$

al calcular las derivadas de los productos y tomando en cuenta que las derivadas cruzadas son iguales porque f y g son de clase $\mathcal{C}^2$ se obtiene que $\operatorname{div}(\nabla f \times \nabla g) = 0$. $\square$

Algunas identidades sencillas en el análisis vectorial serían las siguientes: f y g denotan campos escalares y F y G campos vectoriales

(a) $\nabla(f + g) = \nabla(f) + \nabla(g)$.

(b) $\nabla(kf) = k\nabla(f)$, donde k es una constante.

(c) $\nabla(fg) = f\nabla(g) + g\nabla(f)$.

(d) $\nabla(f/g) = \frac{g\nabla(f) - f\nabla(g)}{g^2}$.

(e) $\operatorname{div}(F + G) = \operatorname{div}(F) + \operatorname{div}(G)$.

(f) $\text{Rot } (F + G) = \text{Rot } (F) + \text{Rot } (G)$.

(g) $\operatorname{div}(fF) = f\operatorname{div}(F) + F \cdot \nabla f$.

(h) $\text{Rot }(fG) = f\text{Rot }(G) + \nabla f \times G$.

Así por ejemplo, para probar (h), si $G = (g_1, g_2, g_3)$, entonces $fG = (fg_1, fg_2, fg_3)$. Luego

$$\begin{aligned}
\text{Rot } \ fG &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ fg_1 & fg_2 & fg_3 \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial y}(fg_3) - \frac{\partial}{\partial z}(fg_2)\,,\ \frac{\partial}{\partial z}(fg_1) - \frac{\partial}{\partial x}(fg_3)\,,\ \frac{\partial}{\partial x}(fg_2) - \frac{\partial}{\partial y}(fg_1) \right) \\
&= f\left(\frac{\partial g_3}{\partial y} - \frac{\partial g_2}{\partial z}\,,\ \frac{\partial g_1}{\partial z} - \frac{\partial g_3}{\partial x}\,,\ \frac{\partial g_2}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial y} \right) \\
&\qquad + \left(\frac{\partial f}{\partial y} g_3 - \frac{\partial f}{\partial z} g_2\,,\ \frac{\partial f}{\partial z} g_1 - \frac{\partial f}{\partial x} g_3\,,\ \frac{\partial f}{\partial x} g_2 - \frac{\partial f}{\partial y} g_1 \right) \\
&= f\text{Rot } \ G + \begin{vmatrix} i & j & k \\ f_x & f_y & f_z \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{vmatrix} \\
&= f\text{Rot } \ G + \nabla f \times G.
\end{aligned}$$

Observación 4. Si F representa el campo velocidad de un fluido, la divergencia de F se puede interpretar como la tasa de expansión del fluido por unidad de volumen en la unidad de tiempo. Más adelante estudiaremos esto de nuevo.

Clase 6. Teorema de Stokes

La generalización de la forma vectorial del teorema de Green (Teorema (4.1)) al espacio $\mathbb{R}^3$ se obtiene cuando la superficie S es acotada por una curva cerrada en $\mathbb{R}^3$, así podemos enunciar el teorema de Stokes

Teorema 4.2 (Stokes)**.** Sea S una superficie de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}^3$ orientada, con vector normal η unitario. Supongamos que su curva frontera, denotada por ∂S, se orienta de manera que la superficie S queda a la izquierda de la curva (contrario al movimiento de las agujas del reloj). Sea F un campo vectorial $\mathcal{C}^1$ en un conjunto abierto que contiene a WS y su frontera ∂S, entonces

$$\iint\limits_{S} \text{Rot } F \cdot \eta \, dS = \int\limits_{\partial S} F \cdot d\sigma$$

Si la superficie S es la gráfica de una función $z = f(x, y)$, de manera que S se parametriza por $\phi : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\phi(u, v) = (u, v, f(u, v))$, donde $\mathcal{D}$ es una región cuya frontera $\partial\mathcal{D}$ es una curva cerrada simple con orientación positiva de manera que se cumple el teorema de Green.

Si $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, $\sigma(t) = (x(t), y(t))$ es una parametrización que conserva la orientación positiva, entonces la curva frontera ∂S es la curva cerrada simple orientada que es imagen de la función $\eta(t) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$ con la orientación indicada por $\eta(t)$.

La superficie S debe quedar a la izquierda al movernos sobre ∂S de acuerdo a la regla de la mano derecha.

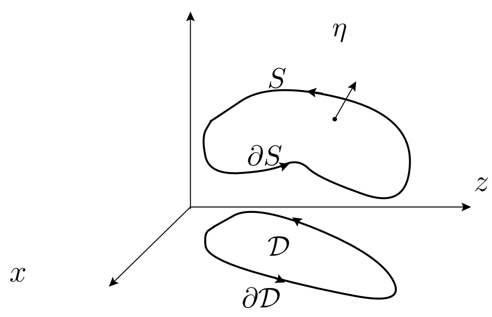

Figura 11:

Teorema 4.3 (Stokes para Gráfica)**.** Sea S la superficie orientada definida por una función $\mathcal{C}^2$, $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \mathcal{D}$ y sea F un campo vectorial $\mathcal{C}^1$ en S. Si ∂S denota la curva frontera orientada que acota a S, entonces

$$\iint\limits_S \text{Rot } F \cdot dS = \int F \cdot d\sigma$$

Recordemos que $\iint_S \text{Rot } F \cdot S = \iint_S \text{Rot } F \cdot \eta \, dS$. Así el teorema de Stokes afirma que la integral de la componente normal del rotor de un campo vectorial F sobre una superficie S es igual a la integral de la componente tangencial de F alrededor de la frontera ∂S.

La demostración puede verse en el libro *Cálculo Vectorial* de Marsden-Tromba, simplemente realizando los cálculos que se indican al suponer $F = (P, Q, R)$, la parametrizacón de ∂S dada por $\eta(t) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$ y aplicaciones de la regla de la cadena y el teorema de Green.

A continuación enunciaremos el teorema para superficies parametrizadas.

Teorema 4.4 (Stokes Para Superficies Parametrizadas)**.** Sea S una superficie orientada definida por una parametrización ϕ inyectiva $\phi : \mathcal{D}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Si ∂S denota la curva frontera orientada que acota a S y F es un campo vectorial $\mathcal{C}^1$ en S, entonces

$$\int\limits_{\partial S} F \cdot d\sigma = \iint\limits_S \text{Rot } F \cdot dS$$

Si $\sigma(t) = (u(t), v(t))$ es una parametrización de $\partial\mathcal{D}$ en la dirección positiva, la imagen de $\partial\mathcal{D}$ bajo ϕ, $\phi(\partial\mathcal{D})$ será la frontera geométrica de $S = \phi(\mathcal{D})$ y la frontera de ∂S será la curva cerrada simple orientada que es la imagen de la función $\eta(t) = \phi(u(t), v(t))$ con la orientación inducida por η

Ejemplo 4.5. Sea C la curva intersección entre las superficies de ecuación $z = x^2 + y^2$ y $x^2 + (y-1)^2 = 1$ con orientación anti-horaria vista desde arriba. Si el campo vectorial F está dado por $F(x, y, z) = (y, -x, z)$, calcule $\int_C F \cdot d\sigma$

Solución. El cilindro corta sobre el paraboloide $z = x^2 + y^2$ una superficie S acotada por C, como se muestra en la figura (12). Se cumplen las condiciones del teorema de Stokes, F es $\mathcal{C}^1$ y la orientación inducida η en S es hacia arriba.

parametrizamos el paraboloide $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ con $\phi(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$; $\mathcal{D} : x^2 + (y-1)^2 \leq 1$, $T_x \times T_y = (-f_x, -f_y, 1) = (-2x, -2y, 1)$. Así esta parametrización conserva la orientación η. Calculemos Rot $F = (0, 0, -2)$ y aplicando el teorema de Stokes

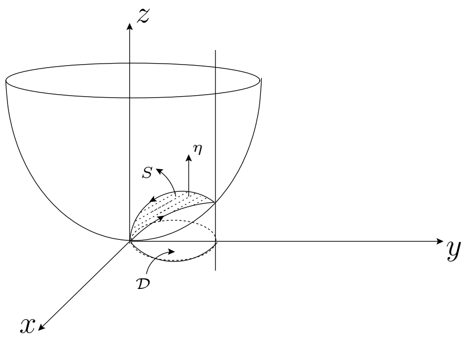

Figura 12:

tenemos

$$\int_C F \cdot d\sigma = \iint_S \text{Rot } F \cdot dS = \iint \mathcal{D}(0,0,-2) \cdot (-2x,-2y,1)\, dxdy$$

$$= -2 \iint_{\mathcal{D}} dxdy = -2\text{Área}(\mathcal{D}) = -2\pi$$

Ejemplo 4.6. Calcule la integral $\int_C F \cdot dl$, donde el campo vectorial F está dado por $F(x,y,z) = (2y+z, x+z, x+y)$ y la curva C es la intersección del plano $z = y$ con el cilindro $x^2 + y^2 = 2y$ son sentido anti-horario vista desde abajo.

Solución. Calculamos Rot $F = (0,0,-1)$. C encierra una superficie S acotada sobre el plano $z = y$, como se muestra en la figura (13), con orientación η hacia abajo.

Parametrizando dicho plano $\phi(x,y) = (x,y,y), z = f(x,y) = y, T_x \times T_y = (-f_x, -f_y, 1) = (0,-1,1)$ y la parametrización invierte la orientación. Como F es $\mathcal{C}^1$, aplicando el teorema de Stokes

$$\begin{aligned}\int_C F \cdot dl &= \iint_{S,\eta} \text{Rot } F \cdot dS = -\iint_{x^2+y^2 \leq 2y} (0,0,-1) \cdot (0,-1,1)\, dxdy \\ &= -\iint_{\mathcal{D}} -\, dA = \iint_{\mathcal{D}} dA = \text{Área}(\mathcal{D}) = \pi\end{aligned}$$

Note que anti-horario desde abajo es horario desde arriba.

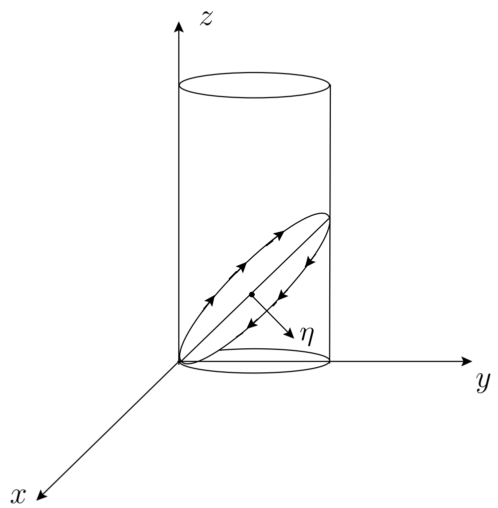

Figura 13:

Clase 7. Campos Conservativos

Sea F un campo vectorial $F : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Definición 4.7. Se dice que F es conservativo en $\mathcal{D}$ si para toda curva cerrada orientada simple en $\mathcal{D}$ se cumple que $\int_C F \cdot dl = 0$.

Definición 4.8. Se dice que la integral de línea $\int_C F \cdot dl = 0$ es independiente de la trayectoria (o que depende sólo de los puntos extremos de la curva) si para cualesquiera dos curvas C_1 y C_2 en $\mathcal{D}$ con idénticos puntos extremos se cumple que

$$\int_{C_1} F \cdot dl = \int_{C_2} F \cdot dl$$

Es claro que estas dos definiciones son equivalentes: si suponemos que se cumple (4.8) para probar (4.7), tomamos una curva C cerrada, se tiene que C y $-C$ tienen los mismos extremos. Por (4.8) es $\int_C F \cdot dl = \int_{-C} F \cdot dl = -\int_C F \cdot dl$, así $2\int_C F \cdot dl = 0$ y $\int_C F \cdot dl = 0$ cumpliéndose (4.7). Suponiendo ahora que se cumple (4.7), elegimos dos curvas arbitrarias C_1 y C_2 con extremos iguales. Luego $C_1 - C_2$ es cerrada, ver figura (14). Por (4.7) es $\int_{C_1 - C_2} F \cdot dl = 0$, es decir, $\int_{C_1} F \cdot dl - \int_{C_2} F \cdot dl = 0$ y así $\int_{C_1} F \cdot dl = \int_{C_2} F \cdot dl$, cumpliéndose (4.8).

Si $F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ en la integral $\int_C F \cdot dl = \int_C Pdx + Qdy + Rdz$ aparece la expresión $Pdx + Qdy + Rdz$. Diremos que esta expresión es una diferencial

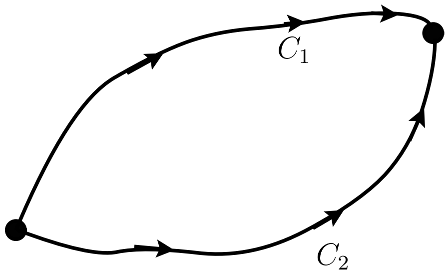

Figura 14:

exacta si existe un campo escalar $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de manera que su derivada total df coincida con ella, es decir, si $df = Pdx + Qdy + Rdz$. Luego $f_x dx + f_y dy + f_z dz = Pdx + Qdy + Rdz$ y así $\frac{df}{dx} = P$, $\frac{df}{dy} = Q$ y $\frac{df}{dz} = R$. En forma equivalente si el campo vectorial F satisface que $F = \nabla f$ se dirá en este caso que f es un potencial de F. Usando el teorema (3.12), si $F = \nabla f$, entonces Rot $F =$ Rot $\nabla f = \nabla \times \nabla f = 0$. Por otra parte, si Rot $F = 0$ y C es una curva cerrada orientada en $\mathcal{D}$, tomamos una superficie S cuya frontera sea C y aplicando el teorema de Stokes (F sería $\mathcal{C}^1$) se tiene que $\int_C F \cdot dl = \iint_S \text{Rot } F \cdot dS = 0$. Luego

Teorema 4.9. Si existe un potencial f del campo vectorial $F : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, entonces Rot $F = 0$ y el campo es conservativo.

La forma general del teorema de campos conservativos sería enunciado así

Teorema 4.10. Sea F un campo vectorial $\mathcal{C}^1$ definido en $\mathbb{R}^3$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(I) F es conservativo.

(II) La integral de línea $\int_C F \cdot dl$ es independiente de la trayectoria.

(III) Existe una función de potencial f para F, es decir, $F = \nabla f$.

(IV) La expresión $Pdx + Qdy + Rdz$ es una diferencial exacta, $F = (P, Q, R)$.

(V) Rot $F = 0$

Demostración : Sólo resta ver que (II) $\Rightarrow$ (III), lo cual se hace considerando la función

$$f(x, y, z) = \int_0^x P(t, 0, 0)\, dt + \int_0^y Q(x, t, 0)\, dt + \int_0^z R(x, y, t)\, dt$$

□

Ejemplo 4.11. Considere el campo vectorial F, $F(x, y, z) = (2xy + z^3, x^2, 3xz^2 + z)$.

(a) Decida si es conservativo.

(b) En caso afirmativo obtenga un potencial f.

(c) Calcule la integral $\int_C F \cdot dl$, donde C es una curva que une el punto $(1, -2, 1)$ con el punto $(3, 1, 4)$

Solución. (a) El campo F es $\mathcal{C}^1$, calculemos su rotor

$$\text{Rot } F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy + z^3 & x^2 & 3xz^2 + z \end{vmatrix} = 0$$

Luego por el teorema (4.10) F es conservativo.

(b) Para calcular el potencial f, es decir, el campo escalar f tal que $F = \nabla f$, resolvemos el sistema: $f_x = P$, $f_y = Q$ y $f_z = R$:

$$\begin{cases} f_x &= 2xy + z^3 \\ f_y &= x^2 \\ f_z &= 3xz^2 + z \end{cases}$$

Integrando la primera ecuación con respecto a x será

$$f(x, y, z) = \int (2xy + z^3)\, dx + \varphi(y, z) = x^2 y + z^3 x + \varphi(y, z)$$

derivando respecto de y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = x^2$$

así, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$. Integrando $\varphi(y, z) = \displaystyle\int \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, dy + \psi(z) = \psi(z)$. Luego $f(x, y, z) = x^2 y + z^3 x + \psi(z)$, al derivar respecto de z, $f_z = 3z^2 x + \psi'(z) = 3xz^2 + z$. Así $\psi'(z) = z$, $\psi(z) = z^2/2 + k$. Por último

$$f(x, y, z) = x^2 y + z^3 x + \frac{z^2}{2} + k.$$

(c) $\displaystyle\int_C F \cdot dl = \int_C \nabla f \cdot dl = f(p_1) - f(p_0) = f(3, 1, 4) - f(1, -2, 1) = \frac{415}{2}$

Observación 5. Se puede obtener f muy fácilmente calculando $\int P\,dx$, $\int Q\,dy$ y $\int R\,dz$:

$$\begin{aligned}
\int P\,dx &= \int 2xy + z^3\,dx = x^2y + z^3x + k \\
\int Q\,dy &= \int x^2\,dy = x^2y + k \\
\int R\,dz &= \int 3xz^2 + z\,dz = xz^3 + z^2/2 + k
\end{aligned}$$

Se toman los términos semejantes sin repetirlos (deben tener los mismos coeficientes), así

$$f(x,y,z) = x^2y + z^3x + \frac{z^2}{2} + k.$$

Si los términos semejantes tienen coeficientes distintos el sistema no es conservativo.

Ejemplo 4.12. Consideremos el campo vectorial F dado por

$$F(x,y,z) = (y^2 + 2xyz + h(z), 2xy + x^2z + 2yz^2, x^2y + 2y^2z + x\cos(z))$$

(a) Obtener la función real derivable $h(z)$ para que el campo sea conservativo.

(b) Usando esta función, halle un potencial f

Solución. (a) F es $\mathcal{C}^1$ y resolvemos el sistema Rot $F = 0$. Se obtiene

$$\text{Rot } F = (0, h'(z) - \cos(z), 0) = (0,0,0)$$

De $h'(z) = \cos(z)$ es $h(z) = \sin(z) + c$. Tomando $c = 0$ es $h(z) = \sin(z)$.

(b)

$$F(x,y,z) = (y^2 + 2xyz + \sin(z), 2xy + x^2z + 2yz^2, x^2y + 2y^2z + x\cos(z))$$

Resolviendo $F = \nabla f$ o integrando será

$$\begin{aligned}
\int P\,dx &= \int y^2 + 2xyz + \sin(z)\,dx = y^2x + x^2yz + x\sin(z) + k \\
\int Q\,dy &= \int 2xy + x^2z + 2yz^2\,dy = xy^2 + x^2yz + y^2z^2 + k \\
\int R\,dz &= \int x^2y + 2y^2z + x\cos(z)\,dz = x^2yz + y^2z^2 + x\sin(z) + k
\end{aligned}$$

Luego $f(x,y,z) = y^2x + x^2yz + x\sin(z) + y^2z^2 + k$

Clase 8. Teorema de la Divergencia

La generalización del teorema (5.5), de la divergencia en el plano (o de Green) al espacio $\mathbb{R}^3$ se obtiene al considerar el flujo de un campo vectorial a través (hacia afuera, orientación exterior) de una superficie cerrada la cual encierra a una región (volumen), en condiciones adecuadas el flujo del campo coincidirá con la integral triple de la divergencia.

Teorema 4.13 (Divergencia)**.** Sea V una región el el espacio de tipo IV y denotemos por ∂V la superficie cerrada orientada que acota a V. Si F es un campo vectorial $\mathcal{C}^1$ definido en V, entonces

$$\iint_{\partial V} F \cdot dS = \iiint_{V} \text{div} F \, dv$$

Teorema 4.14 (Ley de Gauss)**.** Sea V una región en el espacio de tipo IV y denotemos por ∂V la superficie cerrada orientada con η que acota a V. Consideremos el campo vectorial $r(x, y, z) = (x, y, z)$ y $\|r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\|$. Si el origen no está en ∂V, entonces

$$\iint_{\partial V} \frac{r \cdot \eta}{\|r\|^3} \, dS = \begin{cases} 4\pi & \text{si } (0, 0, 0) \in V; \\ 0 & \text{si } (0, 0, 0) \notin V. \end{cases}$$

Para interpretar la divergencia como tasa de expansión de flujo, recurrimos al siguiente teorema

Teorema 4.15. Sea $B(t)$ la región esférica de radio t, con centro en el punto P en $\mathbb{R}^3$. La esfera (superficie) de radio t, denotada por $S(t)$, es la frontera de $B(t)$ con vector normal unitario η exterior. Si $V(t)$ denota el volumen de $B(t)$ y F es un campo vectorial (en las esferas), entonces

$$(\text{div} F)(P) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{V(t)} \iint_{S(t)} F \cdot \eta \, dS$$

Es decir, la divergencia de F en el punto P es la razón de cambio del flujo saliendo de la esfera por unidad de volumen, por unidad de tiempo en el punto. Si se interpreta F como una densidad de masa, entonces la divergencia de F en P sería la razón de cambio de la masa por unidad de volumen en la unidad de tiempo en el punto P

Demostración : La función escalar $f(x, y, z) = \text{div} F$ es continua por ser F de clase $\mathcal{C}^1$ y se puede escribir que $f(\mathbf{x}) = f(P) + h(\mathbf{x})$, donde $\mathbf{x} = (x, y, z)$ y $\lim_{\mathbf{x} \to P} h(\mathbf{x}) = 0$. Al aplicar el teorema de la divergencia se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{V(t)}\iint\limits_{S(t)} F\cdot\eta\, dS &= \frac{1}{V(t)}\iiint\limits_{B(t)} \text{div}F\, dv\\ &= \frac{1}{V(t)}\iiint\limits_{B(t)} f(P)\, dv + \frac{1}{V(t)}\iiint\limits_{B(t)} h\, dv\end{aligned}$$

como $f(P)=\text{div}F(P)$ es constante

$$\begin{aligned}\frac{1}{V(t)}\iint\limits_{S(t)} F\cdot\eta\, dS &= f(P)\frac{1}{V(t)}\iiint\limits_{B(t)} dv + \frac{1}{V(t)}\iiint\limits_{B(t)} h\, dv\\ &= f(P) + \frac{1}{V(t)}\iiint\limits_{B(t)} h\, dv\end{aligned}$$

ahora podemos probar que $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{V(t)}\iiint\limits_{B(t)} h\, dv = 0$. Por ser $h(x)\to 0$, para $x\to P$ es $\max\limits_{\|x-P\|\le t}\|h(x)\|\to 0$ si $t\to 0$. Luego

$$\left|\frac{1}{V(t)}\iiint\limits_{B(t)} h\, dv\right| \le \max_{\|x-P\|\le t}|h(x)|\frac{1}{V(t)}\iiint\limits_{B(t)} dv \le \max_{\|x-P\|\le t}\|h(x)\|$$

tomando límite es

$$0\le \lim_{t\to 0}\left|\frac{1}{V(t)}\iiint\limits_{B(t)} h\, dv\right| \le \lim_{t\to 0}\max_{\|x-P\|\le t}|h(x)| = 0$$

Así, $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{V(t)}\iiint\limits_{B(t)} h\, dv = 0$ y $f(P)=\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{V(t)}\iint\limits_{S(t)} F\cdot\eta\, dS$ $\square$

Ejemplo 4.16. Considere el campo vectorial F dado por $F(x,y,z)=(zx\sqrt{z^2-y^2}, 2yz, y\sqrt{x^2-y^2}-z^2)$ y las superficies $S_1=\{(x,y,z): x^2+y^2\le 9, z=3\}$, $S_2=\{(x,y,z): x^2+y^2=z^2, 1\ge z\le 3\}$, $S_3=\{(x,y,z): x^2+y^2\le 1, z=1\}$. Sea $S=S_1\cup S_2\cup S_3$ con la orientación de los vectores normales exteriores. Calcule $\iint\limits_{S} F\cdot dS$

Solución. Se cumplen las condiciones del teorema de la divergencia. Calculamos $\text{div}F = z\sqrt{z^2-y^2}$. Así $\iint\limits_{S} F\cdot dS = \iiint\limits_{V} \text{div}F\, dV$

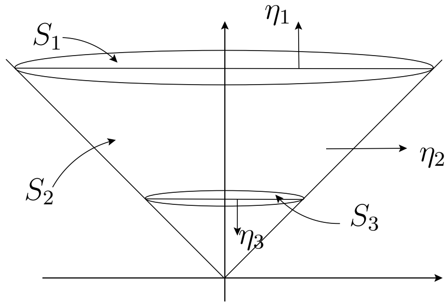

Figura 15:

$$
\begin{aligned}
\iiint\limits_V \operatorname{div} F\, dV &= \int_1^3 \int_{-z}^{z} \int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} z\sqrt{z^2-y^2}\, dx\, dy\, dz \\
&= 2\int_1^3 \int_{-z}^{z} z(z^2-y^2)\, dy\, dz = \frac{8}{3}\int_1^3 z^4\, dz \\
&= \frac{8}{3}\frac{z^5}{5}\Big|_1^3 \\
&= \frac{1936}{15}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 4.17. Consideremos el cilindro de ecuación $x^2+y^2 = 2y$. Este cilindro corta al cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$ en una superficie acotada S_1. La superficie lateral del cilindro comprendida entre el cono y el plano z=0 se denota por S_2 y sea $S = S_1 \cup S_2$ con la orientación exterior. Si el campo vectorial F está dado por $F(x, y, z) = (2x, x, z + 1)$ calcule $\iint\limits_S F \cdot dS = \text{Flujo}(S)$.

Solución. Sea S_3 la tapa inferior dada por $z = 0$, $x^2 + y^2 \leq 2y$. Así $S \cup S_3$ acota (encierra) una región de volumen V. El campo F es suave y aplicando el teorema de la divergencia es

$$\iiint\limits_V \operatorname{div} F\, dV = \iint\limits_{S\cup S_3} F \cdot dS = \iint\limits_S F \cdot dS + \iint\limits_{S_3} F \cdot dS$$

De aquí es $\iint_S F \cdot dS = \iiint_V \operatorname{div} F\, dV - \iint_{S_3} F \cdot dS$. Calculemos la integral de volumen de la divergencia y el flujo en S_3 (la tapa inferior). Sobre S_3 será $z = 0 = f(x, y)$, $\mathcal{D}$: $x^2 + (y-1)^2 \leq 1$. La parametrización usual es $\phi(x, y) = (x, y, f(x, y)) = (x, y, 0)$, $T_x \times T_y = (-f_x, -f_y, 1) = (0, 0, 1)$. La orientación exterior η_3 está dada $\eta_3 = (0, 0, -1)$. Luego ϕ invierte

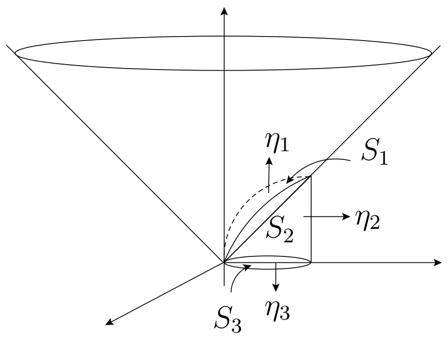

Figura 16:

la orientación y así

$$\begin{aligned}
\text{Flujo}(S_3) &= \iint\limits_{S_3} F \cdot dS = -\iint\limits_{\mathcal{D}} (2x, x, 1) \cdot (0,0,1)\, dx\, dy \\
&= -\iint\limits_{\mathcal{D}} dA \\
&= -\text{Area}(\mathcal{D}) = -\pi
\end{aligned}$$

Calculemos $\iiint\limits_V \text{div}F\, dV == 3 \iint\limits_{\mathcal{D}} \int\limits_0^{\sqrt{x^2+y^2}} dz\, dx\, dy = 3 \iint\limits_{\mathcal{D}} \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy$. Usando coordenadas polares $x = r\cos(t)$, $y = r\sin(t)$, y sustituyendo en $x^2 + y^2 = 2y$ es $r^2 = 2r\sin(t)$, $r = 0$, $r = 2\sin(t)$, $0 \leq t \leq \pi$

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_V \text{div}F\, dV &= 3 \iint\limits_{\mathcal{D}} \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy \\
&= 3 \int_0^{\pi} \int_0^{2\sin(t)} r^2\, dr\, dt = \frac{8}{3} \cdot 3 \int_0^{\pi} \sin^3(t)\, dt \\
&= 8 \int_0^{\pi} \sin^2(t)\sin(t)\, dt = 8 \int_0^{\pi} (1 - \cos^2(t))\sin(t) = \frac{32}{3}
\end{aligned}$$

sustituyendo

$$\iint\limits_S F \cdot dS = \iiint\limits_V \text{div}F\, dV - \iint\limits_{S_3} F \cdot dS = \frac{32}{3} - (-\pi) = \frac{32}{3} + \pi$$